Injectivité, surjectivité et bijectivité

Exercice 1 [01501] [correction]
Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
Etudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 2 [01502] [correction]
Soient a, b et c trois réels tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{a/c\} \to \mathbb{R}\backslash\{a/c\}$ définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$.
Justifier que l'application f est bien définie.
Calculer $f \circ f$, en déduire que f est une permutation dont on déterminera l'application réciproque.

Exercice 3 [01503] [correction]
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 4 [01504] [correction]
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Etablir les implications suivantes :
a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective
c) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective.
d) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective.

Exercice 5 [01505] [correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$
Etablir que si $h \circ g \circ f$ est injective et que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 6 [01506] [correction]
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 7 [01507] [correction]
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
Montrer que f et g sont bijectives

Exercice 8 [01508] [correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$.
On suppose $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 9 [01509] [correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$.
On suppose f surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

Exercice 10 [01510] [correction]
Soit $f : E \to I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$.
Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E.

Exercice 11 [01511] [correction]
Soient A et B deux parties d'un ensemble E et

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

Montrer que :
a) f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$
b) f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) On a

k	0	1	2	3	...
$f(k)$	0	2	4	6	...

et

k	0	1	2	3	...
$g(k)$	0	0	1	1	...

f est injective car $2k = 2k' \Rightarrow k = k'$ mais non surjective car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises.
g est surjective car $2y$ est un antécédent de y mais non injective car un nombre pair et l'impair qui le suit prennent même valeur par g.
b) D'une part

$$(g \circ f)(k) = k$$

donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
D'autre part

$$(f \circ g)(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair} \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f$ est bijective. $f \circ g$ n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 2 : [énoncé]
f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ car le dénominateur ne s'y annule pas.

$$f(x) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (ax+b)c = a(cx-a) \Leftrightarrow a^2 + bc = 0$$

qui est exclu, donc f est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$.
Par calculs

$$(f \circ f)(x) = \cdots = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$$

Puisque $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\setminus\{a/c\}}$, f est une involution, c'est donc une permutation et $f^{-1} = f$.

Exercice 3 : [énoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si n est pair alors $f(n) = n/2 \in \mathbb{Z}^+$ et si n est impair alors $f(n) = -(n+1)/2 \in \mathbb{Z}^{-\star}$.
Dans les deux cas $f(n) \in \mathbb{Z}$.
Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. Supposons $f(n) = f(n')$.
Compte tenu de la remarque précédente, n et n' ont nécessairement même parité.
Si n et n' sont pairs alors $n/2 = n'/2$ donc $n = n'$.
Si n et n' sont impairs alors $-(n+1)/2 = -(n'+1)/2$ donc $n = n'$.
Ainsi f est injective.
Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Si $m \geqslant 0$ alors pour $n = 2m \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Si $m < 0$ alors pour $n = -2m - 1 \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Ainsi f est surjective.
Finalement f est bijective.

Exercice 4 : [énoncé]
a) Supposons $g \circ f$ injective.
Soient $x, x' \in E$. Si $f(x) = f(x')$ alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or $g \circ f$ injective, donc $x = x'$.
Ainsi f injective.
b) Supposons $g \circ f$ surjective.
Soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. Pour $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = z$.
Ainsi g surjective.
c) Supposons $g \circ f$ injective et f surjective.
Par a), on a f injective et donc f bijective. Introduisons f^{-1}.
$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective par composition d'applications injectives.
d) Supposons $g \circ f$ surjective et g injective.
Par b), on a g surjective donc g bijective. Introduisons g^{-1}.
$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est surjective par composition d'applications surjectives.

Exercice 5 : [énoncé]
Supposons $h \circ g \circ f$ injective et $g \circ f \circ h$ ainsi que $f \circ h \circ g$ surjectives.
Puisque $(h \circ g) \circ f$ est injective, on a f injective.
Puisque $f \circ (h \circ g)$ est surjective, on a f surjective.
Par suite f est bijective et on peut introduire f^{-1}.
Par composition $h \circ g = (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective et par suite g est injective.
D'autre part $g \circ f \circ h$ est surjective et donc g aussi. Finalement g est bijective.
Par composition $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est injective et $h = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ est surjective donc h est bijective.

Exercice 6 : [énoncé]
Supposons f injective.
Soit $y \in E$. On a $f((f \circ f)(y)) = f(y)$, or f est injective donc $(f \circ f)(y) = y$.
Pour $x = f(y) \in E$ on a $f(x) = f(f(y)) = y$. Finalement f est surjective.
Supposons f surjective.
Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.

Puisque f est surjective, $f \circ f$ l'est aussi et donc $\exists a, a' \in E$ tels que $x = (f \circ f)(a)$ et $x' = (f \circ f)(a')$.
La relation $f(x) = f(x')$ donne alors $(f \circ f \circ f)(a') = (f \circ f \circ f)(a')$ d'où $f(a) = f(a')$ puis $x = f(f(a)) = f(f(a')) = x'$. Finalement f est injective.

Exercice 7 : [énoncé]
Par l'exercice précédent, $f \circ g \circ f$ bijective implique f injective et f surjective.
Ainsi f est bijective et on peut introduire f^{-1}.
$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est bijective par composition d'applications bijectives.

Exercice 8 : [énoncé]
$\forall x \in E$ on a $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$ i.e. $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$ donc $f_1(x) = f_2(x)$.
Ainsi $f_1 = f_2$.

Exercice 9 : [énoncé]
$\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ et alors $g_1(y) = (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x) = g_2(y)$ donc $g_1 = g_2$.

Exercice 10 : [énoncé]
Puisque f est surjective, les A_i sont non vides.
Si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ alors pour $x \in A_i \cap A_j$ on a $f(x) = i$ et $f(x) = j$ donc $i = j$.
Par contraposée : $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
Soient $x \in E$ et $i = f(x)$. On a $x \in A_i$. Ainsi $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ puis l'égalité.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Supposons f injective. $f(E) = (A, B) = f(A \cup B)$ donc $E = A \cup B$.
Supposons $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.
Si $f(X) = f(Y)$ alors $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$ donc $X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y$.
Ainsi f est injective.
b) Supposons f surjective. L'élément $(A, \emptyset)$ possède un antécédent $X \in \mathcal{P}(E)$.
On a $A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$.
Supposons $A \cap B = \emptyset$.
Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Pour $X = A' \cup B'$, on a $f(X) = ((A' \cap A) \cup (B' \cap A), (A' \cap B) \cup (B' \cap B)) = (A', B')$ car $A' \cap A = A'$, $B' \cap A = \emptyset$.